INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 345

GESTION DE STOCKS À DEUX NIVEAUX : LE PROBLÈME GÉNÉRAL

Ahmedou HAOUBA
Jean-Marie PROTH

Octobre 1984

GESTION DE STOCKS A DEUX NIVEAUX :

LE PROBLEME GENERAL.

AHMEDOU HAOUBA*

JEAN-MARIE PROTH*

* INRIA, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique,
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - 78153 LE CHESNAY CEDEX (FRANCE)
Tel : (3) 954-90-20

ABSTRACT

This paper is devoted to the two levels inventory planning problem. The demand is known on [0,N], where N is the horizon of the problem. Inventory and ordering costs are supposed to be concave and non decreasing.

We show that the optimal policy is, for the highest level, identical to the well known mono-product optimal policy. At the lowest level, the properties of this policy are more complicated, in particular when several inventories exist at this level.We consider this general case in the following.

RESUME

Ce papier est consacré au problème de gestion de stocks à deux niveaux. La demande est connue sur [0,N], où N est l'horizon du problème. Les coûts de stockage et de commande sont supposés concaves et non décroissants.

Nous montrons que la politique optimale est, pour le niveau haut, identique à la politique optimale bien connue du cas mono-produit. Au niveau bas, les propriétés de cette politique sont plus compliquées, surtout lorsque l'on trouve plusieurs stocks à ce niveau. Dans la suite, nous considérons ce cas général.

0. INTRODUCTION.

Dans la première partie de ce travail, nous nous sommes intéressés à un problème de gestion de stock à deux niveaux avec un ascendant et un seul descendant. Nous généralisons cette approche dans le présent papier : le problème est encore à deux niveaux, mais admet plusieurs descendants.

Nous donnons dans la partie portant sur les propriétés du contrôle optimal, deux résultats inmportants.

Le premier montre qu'au niveau haut, les propriétés du contrôle optimale sont semblables à celles rencontrées dans le cas mono-produit à un niveau. Pour le niveau bas, on montre qu'il existe au plus un descendant pour lequel on se réapprovisionne deux fois lorsque le niveau du stock est non nul. Pour les autres descendants, on se réapprovisionne au plus une fois lorsque le niveau de stock est non nul.

Le deuxième résultat donne l'état des stocks en fin de période. Il indique qu'il existe au plus un descendant que l'on réapprovisionne d'une quantité supérieure à la quantité strictement nécessaire pour satisfaire les demandes. Au niveau haut on se réapprovisionne de la quantité strictement nécessaire pour satisfaire les demandes.

L'utilisation des équations de la programmation dynamique de type rétrograde nécessite, dès que le nombre de descendants dépasse deux, des ressources informatiques très importantes. D'où l'utilité de la décomposition en problèmes adjoints pour l'application d'une heuristique que nous présenterons. Les calculs sont beaucoup moins importants si la fonction qui donne le coût de stockage du niveau zéro est linéaire.

Le contrôle obtenu peut toutefois ne pas être optimal.

I. POSITION DU PROBLEME.

I.1. Le modèle

Il s'agit d'un problème de gestion de stocks à deux niveaux.

Le niveau haut est constitué d'un stock unique noté S_0 et appelé ascendant ; S_0 est réapprovisionné de l'extérieur. On suppose que les ressources extérieures sont illimitées.

Le niveau bas est constitué de plusieurs stocks appelés descendants et notés S_k , $k = 1,2,\ldots,\ell$. S_k est réapprovisionné à partir de S_0 et satisfait des demandes extérieures connues. Aucune rupture de stock n'est admise.

La figure 1 schématise la situation du système.

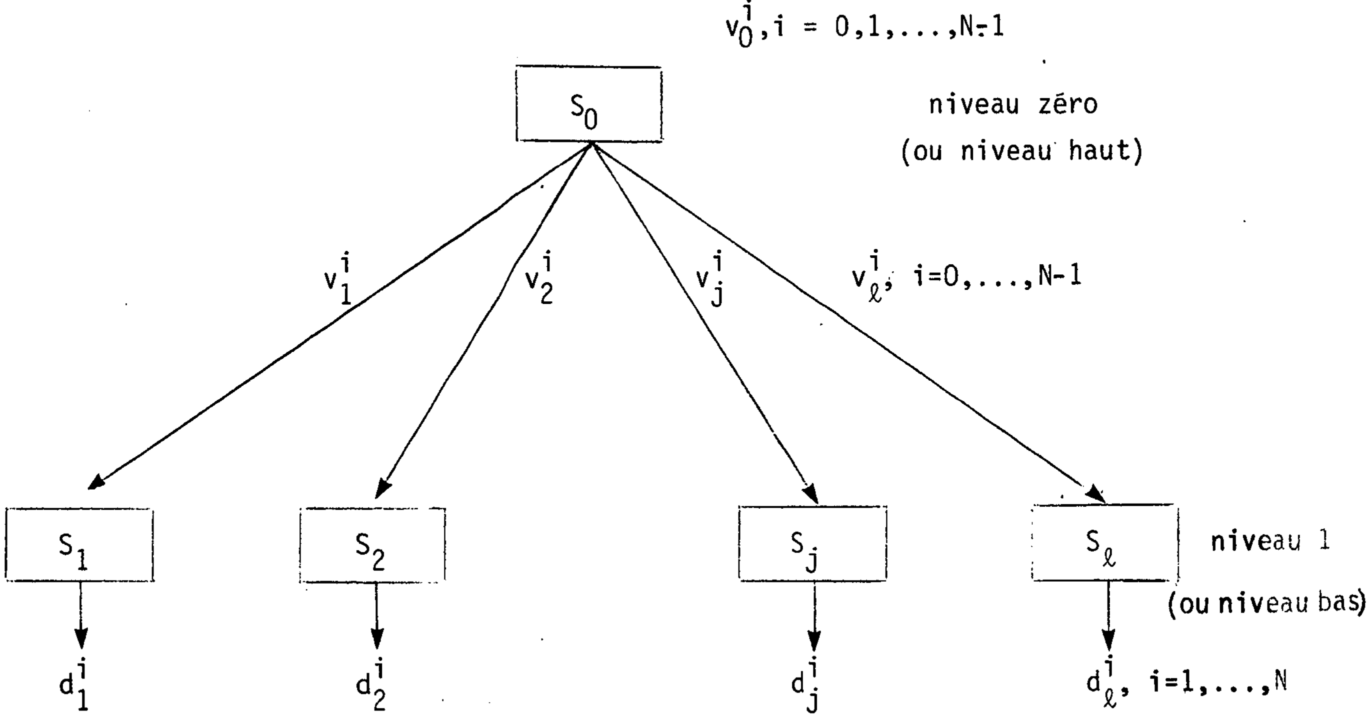


Fig. 1

S_0 est l'ascendant

S_j, $j = 1,\ldots,\ell$, sont les descendants.

Nous avons un ascendant et ℓ descendants.

Les coûts de réapprovisionnement du niveau haut, les coûts de transfert du niveau haut vers chaque descendant, ainsi que les coûts de stockage à chacun de ces niveaux, sont concaves, non décroissants et non stationnaires. Les stocks initiaux sont positifs ou nuls.

Le problème consiste à minimiser le coût total sur un horizon fini donné, sachant qu'aucune rupture de stock n'est admise. L'étude se déroule sur un horizon fini et connu.

I.2. Notation et définitions

Si N est l'horizon du problème,

* d_j^i, $i = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,\ell$, est la demande qui apparait en S_j à l'instant i. Ces valeurs sont connues.

* v_j^i, $i = 0,\dots N-1$, $j = 0,\dots,\ell$, est le réapprovisionnement de S_j à l'instant i qui prend effet à l'instant i+1. Ces paramètres sont des inconnues du problème.

* y_j^i, $i = 0,\dots,N$, $j = 0,\dots,\ell$, est le niveau de stock S_j sur l'intervalle de temps $[i,i+1)$

* y_0^{-1} et y_j^0, $j = 1,\dots,\ell$, sont respectivement le niveau initial du stock S_0 et le niveau initial de S_j (c'est à dire le niveau de S_0 à l'instant -1 et le niveau de S_j, $j = 1,\dots,\ell$, à l'instant 0).

Les équations d'état s'écrivent :

$$\left.\begin{array}{ll} y_0^{i+1} = y_0^i + v_0^i - \sum_{k=1}^{\ell} v_k^{i+1} & i = -1,0,\dots,N-1 \\ y_j^{i+1} = y_j^i + v_j^i - d_j^{i+1} & \text{pour } j = 1,\dots,\ell \text{ et } i = 0,\dots,N-1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Nous convenons que $v_0^{-1} = 0$: c'est le réapprovisionnement du niveau haut décidé à l'instant -1.

Observons au passage le décalage entre le niveau haut et le niveau bas : un réapprovisionnement décidé à l'instant i au niveau haut n'est disponible qu'à l'instant i+1 au niveau bas.

Les contraintes suivantes sont imposées :

$$\left.\begin{array}{l} v_j^i \geq 0 \quad \text{pour } i = 0,1,\ldots,N-1 \text{ et } j = 0,\ldots,\ell \\ \text{Cette première série de contraintes impose des réapprovisionnements} \\ \text{non négatifs.} \\ y_j^i \geq 0 \quad \text{pour } i = 0,1,\ldots N \text{ et } j = 0,\ldots,\ell \\ \text{Cette seconde série impose qu'il n'y ait pas de rupture de stocks} \\ y_0^{-1} \geq 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

* On note, en faisant les mêmes conventions que dans la première partie pour l'utilisation des indices (voir [5])

$$V_j = \{v_j^i\}^{i=0,1,\ldots,N-1} \qquad \text{pour } j \in \{0,\ldots,\ell\}$$

$$V = \{V_j\}_{j=0,1,\ldots\ell}$$

$$Y_j = \{y_j^i\}^{i=0,\ldots,N} \qquad \text{pour } j \in \{1,\ldots,\ell\}$$

$$Y_0 = \{y_0^i\}^{i=-1,\ldots,N}$$

$$Y = \{Y_j\}_{j=0,1,\ldots,\ell}$$

V est appelé contrôle.

Y est l'ensemble des états associés à V en appliquant (1).

Un contrôle vérifiant (2) est dit admissible.

Si V est un contrôle admissible et Y l'ensemble des états associés, le coût associé à V s'écrit :

$$K(y_0^{-1}, y_1^0, \ldots y_\ell^0, V) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\ell} [c_j^i(v_j^i) + f_j^i(y_j^i)]$$

où pour $j = 0,1,\ldots,\ell$ et $i = 0,1,\ldots,N-1$:

* $c_j^i(v)$ est le coût de lancement d'une quantité $v \geq 0$ destinée à réapprovisionner S_j. Ces fonctions sont concaves et non décroissantes.

* $f_j^i(y)$ est le coût de stockage d'une quantité $y \geq 0$ en stock dans S_j sur la période $[i,i+1)$. Ces fonctions sont également concaves et non décroissantes.

Soit $D(y_0^{-1}, y_1^0, \ldots, y_\ell^0)$ l'ensemble des contrôles admissibles. $V^* \in D(y_0^{-1}, y_1^0,\ldots,y_\ell^0)$ est optimal si :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,\ldots,y_\ell^0,V^*) = \min_{V\in D(y_0^{-1},y_1^0,\ldots,y_\ell^0)} K(y_0^{-1},y_1^0,\ldots,y_\ell^0,V) \tag{3}$$

Nous ferons les conventions suivantes :

$$\sigma_j^{p,q} = \begin{cases} \sum_{i=p}^{q} d_j^i & \text{si } 1 \leq p \leq q \leq N \qquad j = 1,\ldots,\ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

$$\sigma_0^{p,q} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=p}^{q} v_j^i & \text{si } 0 \leq p \leq q \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5}$$

$$a^+ = \mathrm{Max}\{a,0\} \tag{6}$$

La condition pour que $D(y_0^{-1},y_1^0,\ldots,y_\ell^0)$ soit non vide s'écrit :

$$y_0^{-1} + \sum_{j=1}^{\ell} y_j^0 \geq \sum_{j=1}^{\ell} d_j^1$$

Cette relation exprime que les demandes qui apparaissent à la fin de la première période pourront être satisfaites.

II. PROPRIETES DU CONTROLE OPTIMAL.

Avant d'exposer les deux résultats principaux donnant la forme du contrôle optimal et l'état des stocks en fin de période lorsqu'on applique un contrôle optimal, nous introduisons des notations supplémentaires.

Quel que soit $k \in \{0,\ldots\ldots,\ell\}$:

* $i_k^0, i_k^1, \ldots, i_k^{d_k}$ est la suite des instants de réapprovisionnements non nul de S_k.

* pour $m \in \{0,\ldots, d_0\}$, $j \in \{0,\ldots\ldots,d_k\}$, $i_k^{s(m)}$ est le plus petit des i_k strictement supérieurs à i_0^m.

* $D(y_0^{-1},y_1^0,\ldots,y_\ell^0)$ est l'ensemble des contrôles admissibles.

Le théorème I que nous allons énoncer indique que :

1. Au niveau haut le problème est semblable au problème mono-produit à niveau unique, c'est à dire que tous les réapprovisionnements, sauf peut être le premier, ont lieu alors que le niveau de stock est nul. De plus, le réapprovisionnement optimal conduit le stock à satisfaire un nombre exact de réapprovisionnements consécutifs du niveau bas.

2. Pour le niveau bas, il existe au plus un descendant pour lequel on se réapprovisionne deux fois avec un niveau de stock non nul, et cela a lieu si le premier réapprovisionnement du niveau haut se fait à un instant où le niveau de stock est nul.

Ces résultats sont donnés par le théorème suivant :

Théorème I :

Si $D(y_0^{-1},y_1^0,\ldots,y_\ell^0) \neq \phi$, il existe un contrôle optimal $V = (V_j)_{j=0,1,\ldots,\ell}$ ayant la propriété P_1 donné par (7) et (8) :

$$\left\{\begin{array}{ll} y_k^{i_k^n} = 0 \quad \text{pour } k \in \{1,\dots,\ell\}, n \in \{1,\dots,d_k\},\ n \neq s(0) & (7) \\ \\ y_0^{i_0^n} = 0 \quad \text{pour } n \in \{1,\dots,d_0\} & (8) \end{array}\right.$$

et

V vérifie de plus la propriété P_2 suivante :

si $y_0^{i_0^0} > 0$ alors $y_k^{i_k^n} = 0$ pour $k \in \{1,\dots,\ell\}$ et $n \in \{1,\dots,d_k\}$ (9)

et si $y_{k_0}^{i_0^0} > 0$ pour $k_0 \in \{1,\dots,\ell\}$ avec $s(0) \neq 0$

alors quel que soit $k \in \{1,\dots,\ell\}$, $k \neq k_0$, $y_k^{i_k^{s(0)}} = 0$ (10)

Dans la propriété P_1 :

* La relation (7) exprime que tous les réapprovisionnements du niveau bas, sauf peut être, pour chaque stock, le premier et celui qui suit le premier réapprovisionnement non nul du niveau haut, ont lieu lorsque le niveau du stock est nul.

*La relation (8) indique qu'au niveau haut, tous les réapprovisionnements, sauf peut être le premier, sont décidés lorsque le stock est nul. C'est le résultat bien connu dans le cas mono-produit à un niveau.

La propriété P_2 précise la précédente :

*La relation (9) indique que si le premier réapprovisionnement du niveau haut a lieu alors que le stock est strictement positif, alors, pour tous les stocks du niveau bas, on observera au plus un réapprovisionnement strictement positif alors que le stock est strictement positif, et ce sera le premier.

*La relation (10) indique qu'au niveau bas, un stock au plus présente deux réapprovisionnements strictement positifs alors que le niveau du stock est lui-même strictement positif.

On peut résumer ces deux propriétés comme suit :

α1. Au niveau haut, un réapprovisionnement strictement positif au plus apparait alors que le niveau du stock est strictement positif, et lorsque cela se produit, c'est le premier des réapprovisionnements positifs.

α2. Au niveau bas, deux cas peuvent se présenter :

α2.1. ou bien le premier réapprovisionnement strictement positif du niveau haut apparait lorsque le niveau du stock est strictement positif. Alors, pour tous les stocks du niveau bas un réapprovisionnement strictement positif au plus apparait alors que le niveau du stock est strictement positif et lorsque cela se produit, c'est le premier.

α2.2. Sinon, la propriété 2.1 reste vraie pour tous les stocks du niveau bas sauf peut être l'un d'entre eux. Lorsque cela se produit, les réapprovisionnements en question dans ce stock sont le premier et le premier qui suit le premier réapprovisionnement strictement positif du niveau haut.

Démonstration.

a. Nous démontrons d'abord qu'il existe un contrôle optimal ayant la propriété P_1.

a.1. Il existe un contrôle optimal vérifiant (7) :

a.1.1. Il existe un contrôle optimal vérifiant (11) :

quel que soit $m \in \{0,\dots d_0\}$ alors

$$y_k^{i_k^n} = 0 \quad \text{pour } n \in \{1,\dots,d_k\},\ k \in \{1,\dots \ell\} \text{ et } n \neq s(m) \tag{11}$$

S'il existait un contrôle optimal V^0 ne vérifiant pas (5), alors il existerait $n \in \{1,\dots,d_k\}$, $m \in \{0,\dots,d_0\}$, $n \neq s(m)$ et $k \in \{1,\dots\ell\}$ tels que $y_k^{i_k^n} > 0$.

On définit :

$$\Delta = \mathrm{Min}\{y_k^{0,i_k^n},\ v_k^{0,i_k^n},\ v_k^{0,i_k^{n-1}}\} \tag{12}$$

On construit les deux contrôles V^a et V^b de la manière suivante :

$$V_k^a = \begin{cases} v_k^{a,i} = v_k^{0,i} & \text{si } i \neq i_k^{n-1} \text{ et } i \neq i_k^n \\ v_k^{a,i_k^{n-1}} = v_k^{0,i_k^{n-1}} - \Delta & \\ v_k^{a,i_k^n} = v_k^{0,i_k^n} + \Delta & \end{cases} \tag{13}$$

$$V_i^a = V_i^0 \qquad \text{pour } i \in \{0,\dots,\ell\} \text{ et } i \neq k \tag{14}$$

et :

$$V_k^b = \begin{cases} v_k^{b,i} = v_k^{0,i} & \text{si } i \neq i_k^{n-1} \text{ et } i \neq i_k^n \\ v_k^{b,i_k^{n-1}} = v_k^{0,i_k^{n-1}} + \Delta & \\ v_k^{b,i_k^n} = v_k^{0,i_k^n} - \Delta & \end{cases} \tag{15}$$

$$V_i^b = V_i^0 \qquad \text{pour } i \in \{0,\dots,\ell\} \text{ et } i \neq k \tag{16}$$

V^a et V^b sont admissibles et optimaux.

La démonstration de cette propriété est identique à celle du théorème 3 dans [5]. Nous la reprendrons donc pas.

Considérons maintenant les relations (12) :

a111. si $\Delta = y_k^{0,i_k^n}$, on pose $V^1 = V^a$ et $y_k^{1,i_k^n} = 0$

a112. si $\Delta = v_k^{0,i_k^n}$, on pose $V^1 = V^b$ et $v_k^{1,i_k^n} = 0$

a113. si $\Delta = v_k^{0,i_k^{n-1}}$, on pose $V^1 = V^a$ et $v_k^{1,i_k^{n-1}} = 0$

Dans tous les cas, on observe que, soit V^1 a une composante strictement positive de moins que V^0, soit la succession des états correspondant au contrôle V^1 comporte une composante nulle de plus que la suite des états correspondant au contrôle V^0. Si bien que, en construisant V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V^0 et ainsi de suite, on est assuré d'aboutir à un contrôle optimal vérifiant (11).

a1.2. Montrons que (7) est vérifiée.

Supposons que V ne vérifie pas (7) mais vérifie (11), c'est à dire qu'il existe $n \geq 1$ et $k \in \{1,2,\dots,\ell\}$ tels que $y_k^{i_k^{s(m)}} > 0$

Nous définissons :

$$\Delta = \mathrm{Min}\,\{v_0^{0,i_0^{m-1}},\ v_k^{0,i_k^{s(m)-1}},\ v_k^{0,i_k^{s(m)}},\ y_k^{0,i_k^{s(m)}}\} \tag{17}$$

On construit deux contrôles optimaux V^a et V^b comme suit :

$$V_k^a = \begin{cases} v_k^{a,i_k^{s(m)-1}} = v_k^{0,i_k^{s(m)-1}} - \Delta \\ v_k^{a,i_k^{s(m)}} = v_k^{0,i_k^{s(m)}} + \Delta \\ v_k^{a,i} = v_k^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{18}$$

$$V_0^a = \begin{cases} v_0^{a,i_0^{m-1}} = v_0^{0,i_0^{m-1}} - \Delta \\ v_0^{a,i_0^m} = v_0^{0,i_0^m} + \Delta \\ v_0^{a,i} = v_0^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{19}$$

$$V_i^a = V_i^0 \quad \text{pour } i \in \{1,\ldots.\ell\} \quad i \neq k \tag{20}$$

et :

$$V_k^b = \begin{cases} v_k^{b,i_k^{s(m)-1}} = v_k^{0,i_k^{s(m)-1}} + \Delta \\ v_k^{b,i_k^{s(m)}} = v_k^{0,i_k^{s(m)}} - \Delta \\ v_k^{b,i} = v_k^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{21}$$

$$V_o^b = \begin{cases} v_0^{b,i_0^{m-1}} = v_0^{0,i_0^{m-1}} + \Delta \\ v_0^{b,i^m} = v_0^{0,i^m} - \Delta \\ v^{b,i} = v^{\ ,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{22}$$

$$V_i^b = V_i^b \quad \text{pour } i \in \{1,\ldots,\ell\} \quad \text{et } i \neq k \tag{23}$$

V^a et V^b sont admissibles et optimaux. La démonstration est identique à celle du théorème 5 dans [5].

Il suffit alors de considérer les différentes valeurs possibles de Δ (c.f. (17)) pour mettre en évidence, comme dans a11, que soit V^a, soit V^b a :

α. Soit une composante nulle de plus que V^0.

β. Soit une valeur nulle de plus dans la suite des valeurs prises par les états associés.

δ. Soit vérifie (7).

Le nombre de composantes étant fini, on est assuré d'aboutir à un contrôle qui vérifie (7). Nous complétons la démonstration de l'existence d'un contrôle optimal vérifiant P_1.

a2. <u>Il existe un contrôle optimal vérifiant (7) et (8), c'est à dire P_1</u>.

Soit $V^0 = (V_j^0)$ $j = 0,\ldots,\ell$ un contrôle optimal vérifiant (7).

Alors nous considérons le problème mono-produit à niveau unique admettant :

* y_0^{-1} comme stock initial

* $(V_j^0)_{j=1,\ldots,\ell}$ comme demande

* c_0^i, $i = 0,1,\ldots,N-1$, comme fonctions de coût de lancement décidé à l'instant i.

* f_0^i, $i = 0,1,\ldots,N-1$, comme fonctions de coût de stockage décidé sur la période $[i,i+1)$.

Nous savons que ce problème admet un contrôle optimal V_0^* tel que $y_0^{*,i_0^n} = 0$ pour $n \in \{1,\ldots,d_0\}$.

On trouve la démonstration dans [2].

Donc le contrôle $V^1 = \{V_0^*,(V_i^0)_{i=1,\ldots,\ell}\}$ est optimal et vérifie P_1.

b. <u>Il existe un contrôle optimal vérifiant P_1 et P_2</u> :

b1. <u>Il existe un contrôle optimal vérifiant P_1 et (9)</u> :

Si V^0 vérifiait P_1 mais pas (9), il existerait $k \in \{1,\dots,\ell\}$ tel que $y_0^{0,i_0^0} > 0$ et $y_k^{0,i_k^{s(0)}} > 0$ avec $s(0) \neq 0$.

Nous définissons :

$$\Delta = \mathrm{Min}\, \{v_k^{0,i_k^{s(0)}} , v^{0,i_k^{s(0)-1}} , y_0^{i_0^0}\} \tag{24}$$

On construit V^a et V^b comme suit :

$$V_k^a = \begin{cases} v_k^{a,i_k^{s(0)-1}} = v_k^{0,i_k^{s(0)-1}} - \Delta \\ v_k^{a,i_k^{s(0)}} = v_k^{0,i_k^{s(0)}} + \Delta \\ v_k^{a,i} = v_k^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{25}$$

$$V_j^a = V_j^0 \quad \text{pour } j \in \{0,\dots,\ell\} \text{ et } j \neq k \tag{26}$$

et :

$$V_k^b = \begin{cases} v_k^{b,i_k^{s(0)-1}} = v_k^{0,i_k^{s(0)-1}} + \Delta \\ v_k^{b,i_k^{s(0)}} = v_k^{0,i_k^{s(0)}} - \Delta \\ v_k^{b,i} = v_k^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{27}$$

$$V_j^b = V_j^0 \quad \text{pour } j \in \{0,\dots,\ell\} \text{ et } j \neq k \tag{28}$$

V^a et V^b sont deux contrôles admissibles et optimaux. La démonstration est encore identique à celle du théorème 6 dans [5].

En considérant comme précédemment les différentes valeurs de Δ(c.f. (24)), on aboutit à un contrôle V^1 plus "proche" de la relation (9) que V^0. En constuisant une suite V^2, V^3,... de contrôles optimaux, on est ainsi assuré d'aboutir à un contrôle optimal vérifiant (9).

b2.Si V^0 vérifie P_1 et (9) mais pas (10), il existe $k_0 \in \{1,2,\ldots \ell\}$ et $s(0) \neq 0$ tels que $y_{k_0}^{i_{k_0}^{s(0)}} > 0$ et $k \in \{1,2,\ldots \ell\}$ avec $k \neq k_0$ tel que $y_k^{i_k^{s(0)}} > 0$

Nous définissons :

$$\Delta = \{y_k^{0,i_k^{s(0)}}, y_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)}}, v_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)}}, v_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)}}\} \tag{29}$$

On construit V^a et V^b de la manière suivante :

$$V_k^a = \begin{cases} v_k^{a,i_k^{s(0)-1}} = v_k^{0,i_k^{s(0)-1}} - \Delta \\ v_k^{a,i_k^{s(0)}} = v_k^{0,i_k^{s(0)}} + \Delta \\ v_k^{a,i} = v_k^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{30}$$

$$V_{k_0}^a = \begin{cases} v_{k_0}^{a,i_{k_0}^{s(0)-1}} = v_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)-1}} + \Delta \\ v_{k_0}^{a,i_{k_0}^{s(0)}} = v_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)}} - \Delta \\ v_{k_0}^{a,i} = v_{k_0}^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{31}$$

$$V_i^a = V_i^0 \quad \text{pour } i \in \{0,\ldots\ell\} \text{ et } i \notin \{k,k_0\} \tag{32}$$

$$V_k^b = \begin{cases} v_k^{b,i_k^{s(0)-1}} = v_k^{0,i_k^{s(0)-1}} + \Delta \\ v_k^{b,i_k^{s(0)}} = v_k^{0,i_k^{s(0)}} - \Delta \\ v_k^{b,i} = v_k^{0,i} \qquad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{33}$$

$$V_{k_0}^b = \begin{cases} v_{k_0}^{b,i_{k_0}^{s(0)-1}} = v_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)-1}} - \Delta \\ v_{k_0}^{b,i_{k_0}^{s(0)}} = v_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)}} + \Delta \\ v_{k_0}^{b,i} = v_{k_0}^{0,i} \end{cases} \tag{34}$$

$$V_i^b = V_i^0 \quad \text{pour } i \in \{0,\ldots,\ell\} \text{ et } i \notin \{k,k_0\} \tag{35}$$

On montre en suivant une même démarche que précédemment que V^a et V^b sont admissibles et optimaux.

Considérons (29) :

1. si $\Delta = y_k^{0,i_k^{s(0)}}$ on pose $V^1 = V^a$ et $y_k^{1,i_k^{s(0)}} = 0$

2. si $\Delta = y_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)}}$ on pose $V^1 = V^b$ et $y_{k_0}^{1,i_{k_0}^{s(0)}} = 0$

3. si $\Delta = v_k^{0,i_k^{s(0)}}$ on pose $V^1 = V^b$ et $v_k^{1,i_k^{s(0)}} = 0$

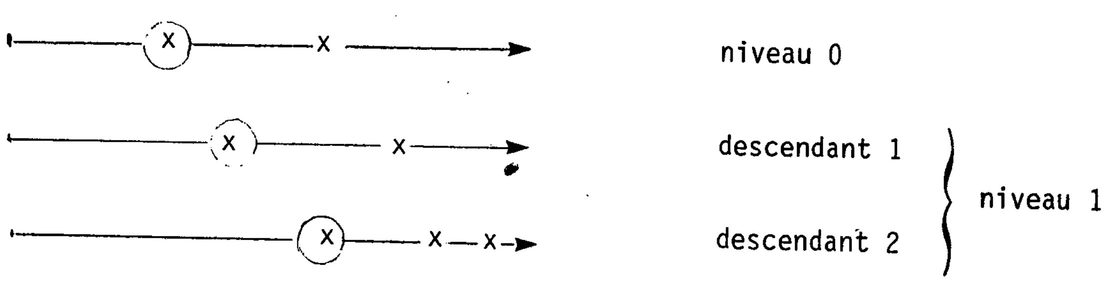
4. si $\Delta = v_{k_0}^{0,i_{k_0}^{s(0)}}$ on pose $V^1 = V^a$ et $v_{k_0}^{1,i_{k_0}^{s(0)}} = 0$

Dans tous les cas, on voit que V^1 est plus "proche" des conditions (10) que V^0.

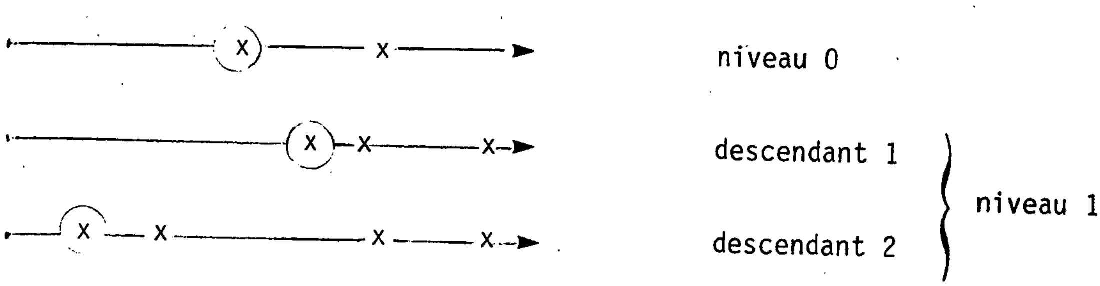
On construit V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V^0. Après un nombre fini d'itérations,on est assuré d'aboutir à un contrôle optimal vérifiant les conditions du théorème.

La figure qui suit schématise les différentes possibilités de réapprovisionnement à l'optimum, dans le cas de deux descendants. On n'oubliera pas que les configurations concernant les descendants peuvent être symétrisées.

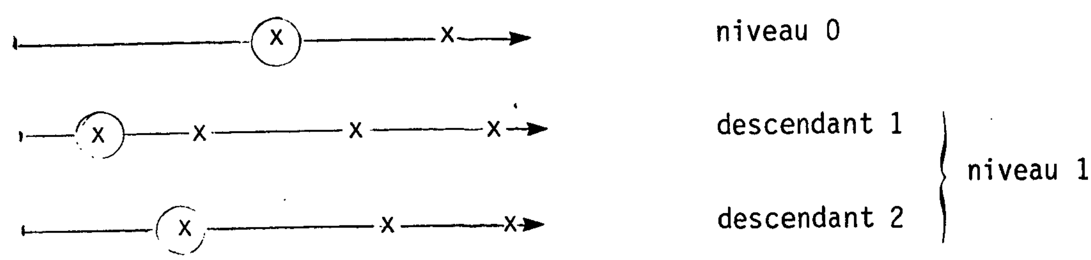
<u>1ère possibilité</u> :



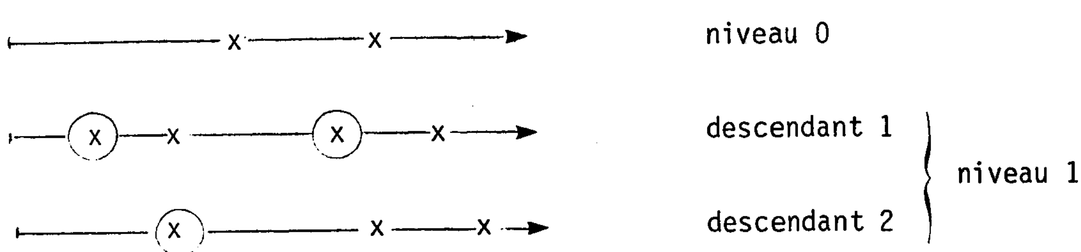
<u>2ème possibilité</u> :



<u>3ème possibilité</u> :



4ème possibilité



5ème possibilité

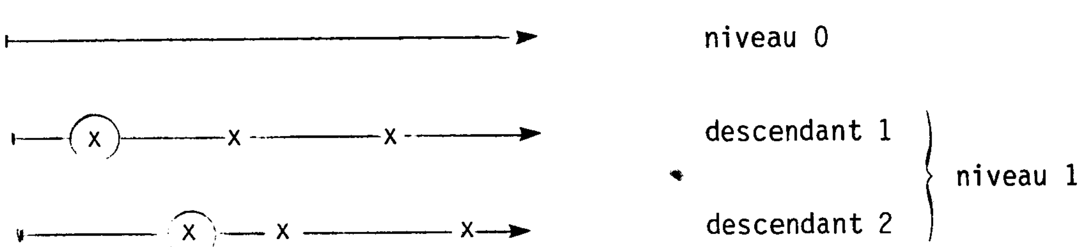


Figure 2.

x : possibilité de réapprovisionnement strictement positif avec un niveau de stock capable de satisfaire au moins la demande suivante.

x : instant de réapprovisionnment non nul avec un niveau de stock nul.

Avec ℓ descendants, on a au plus $\ell+1$ possibilités de réapprovisionnement strictement positif avec des niveaux de stocks susceptibles de satisfaire au moins la demande suivante :

Il s'agit :

a) soit des instants i_j^0, $j = 0,\ldots,\ell$

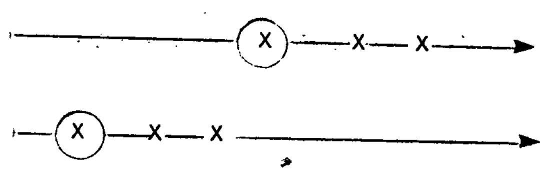
b) soit des instants $i^0_{j_0}$, $i^{s(0)}_{j_0}$, $j_0 \in \{1,\ldots,\ell\}$ et i^0_j, $j \in \{1,\ldots,\ell\}$ et $j \neq j_0$.

Définissons :

$$\alpha_k = (\sigma_k^{1,N} - y_k^0)^+ \quad k \in \{1,\ldots\ell\}$$

Le lemme I que nous présentons maintenant indique que si pour un descendant quelconque le réapprovisionnement a été supérieur aux besoins, alors le dernier réapprovisionnement strictement positif de ce descendant s'est fait avant le premier réapprovisionnement strictement positif du niveau 0.

La figure suivante schématise cette situation. Les conventions sont les mêmes que celles de la figure précédente.



niveau 0

Niveau 1
Descendant k

Figure 3.

<u>Lemme I</u> :

Si $D(y_0^{-1}, y_1^0, \ldots, y_\ell^0) \neq \phi$,

il existe un contrôle optimal vérifiant P_1, P_2 et de plus la propriété P_3 suivante :

$$\text{si } y_k^N > \alpha_k \text{ pour } k \in \{1,\ldots,\ell\}, \text{ alors } i_k^d \leq i_0^0$$

<u>Démonstration</u>

S'il existe un contrôle optimal V^0 vérifiant P_1 et P_2 sans vérifier P_3, alors il existe $k \in \{1,\ldots\ell\}$ tel que $y_k^{0,N} > \alpha_k$ et $i_k^d > i_0^0$

Mais V^0 vérifie P_1 et P_2, donc :

$$i_k^d = i_k^{s(0)}$$

Posons $\Delta = \mathrm{Min}\ \{y_k^{0,N} - \alpha_k,\ v_k^{0,i_k^d}\}$

nous construisons V^1 de la manière suivante : V^1 a toutes ses composantes égales à celles de V^0 sauf :

$$v_k^{1,i_k^d} = v_k^{0,i_k^d} - \Delta$$

$$v_0^{1,i_0^0} = v_0^{0,i_0^0} - \Delta$$

V^1 est un contrôle admissible et optimal. La démonstration est analogue aux démonstrations précédentes.

Considérons les valeurs possibles de Δ :

a. si $\Delta = y_k^{0,N} - \alpha_k$, alors $y_k^{1,N} = \alpha_k$

b. si $\Delta = v_k^{0,i_k^d}$ alors $v_k^{1,i_k^d} = 0$

Dans ces deux cas, le lemme est vérifié.

$\square$

Le deuxième résultat important donné par le théorème II, limite le nombre de niveaux des stocks à explorer lors de la recherche de la solution optimale.

Notons :

$$\alpha_0 = [y_0^{-1} - \sum_{j=1}^{\ell} (\sigma_j^{1,N} - y_j^0)^+]^+$$

$$\alpha_k = (y_k^0 - \sigma_k^{1,N})^+ \qquad \text{pour } k = 1,\dots,\ell$$

$$\beta_0 = y_0^{-1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^{\ell} \sum_{i=0}^{i_{k_0}^{d_{k_0}}} v_j^i \qquad \text{avec } i_{k_0}^{d_{k_0}} < i_0^0$$

Théorème II :

Si $D(y_0^{-1}, y_1^0, \ldots, y_\ell^0) \neq \phi$,

il existe un contrôle optimal V ayant les propriétés P_1, P_2, P_3 et, de plus, la propriété P_4 suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{soit} \quad y_k^N = \alpha_k \text{ pour tout } k \in \{1,\ldots,\ell\} \text{ et } y_0^{N-1} = \alpha_0 \qquad (36) \\ \text{soit} \left(\begin{array}{l} \text{il existe } k_0 \in \{1,\ldots,\ell\} \text{ tel que } y_{k_0}^N = \alpha_{k_0} + \beta_0 \\ \text{et } y_k^N = \gamma_k \text{ pour tout } k \in \{1,\ldots,\ell\} \text{ et } k \neq k_0 \end{array}\right) \text{ et } y_0^{N-1}=0 \qquad (37) \end{array}\right.$$

Démonstration :

Nous savons qu'il existe un contrôle optimal V^0 ayant les propriétés P_1, P_2 et P_3.

Les propriétés P_1 et P_2 entrainent qu'il existe un seul $k_0 \in \{1,\ldots,\ell\}$ tel que $y_{k_0}^{0,N} > \alpha_{k_0}$.

Pour les mêmes raisons, si $y_{k_0}^{0,N} > \alpha_{k_0}$, alors $y_0^{0,i_0^0} = 0$ et $y_0^N = 0$. Cette dernière condition est la conséquence des résultats concernant le problème mono-produit.

Donc si $y_{k_0}^{0,N} > \alpha_{k_0}$, alors $y_k^{0,N} = \alpha_k$ pour $k \in \{1,\ldots,\ell\}$ et $k \neq k_0$, et de plus $y_0^{0,N-1} = 0$.

Partant de la définition de β_0, si $y_{k_0}^{0,N} > \alpha_{k_0}$

$$y_{k_0}^{0,N} = \alpha_{k_0} + \beta_0$$

Ce qui donne (36).

L'autre éventualité conduit à $y_k^{0,N} = \alpha_k$ pour tout $k \in \{1,\dots,\ell\}$ et, en considérant P_1, P_2 et P_3, $y_0^{0,N-1} = \alpha_0$.

Donc on a soit (36), soit (37)

□

Il existe donc au plus un descendant pour lequel on se réapprovisionne au delà de la quantité strictement nécessaire pour satisfaire les demandes. Et, dans ce cas, le niveau du stock de l'ascendant est nul en fin de période.

Dans tous les cas, pour le niveau haut, on ne se réapprovisionne que de la quantité strictement nécessaire pour satisfaire les demandes.

Le théorème II permet de restreindre l'ensemble $D(y_0^{-1}, y_1^0, \dots y_\ell^0)$ des contrôles à explorer.

Nous notons :

$$D^*(y_0^{-1}, y_1^0, \dots, y_\ell^0) \text{ ce nouvel ensemble} \tag{38}$$

Soit $D_n^*(y_0^{-1}, y_1^0, \dots, y_\ell^0)$ le sous-ensemble de (38) formé des $n^{\text{èmes}}$ composantes des éléments de $D^*(y_0^{-1}, y_1^0, \dots, y_\ell^0)$.

En d'autres termes $V \in D^*(y_0^{-1}, y_1^0, \dots, y_\ell^0)$ alors $V^n = (v_0^n, v_1^n, \dots, v_\ell^n) \in D_n^*(y_0^{-1}, y_1^0, \dots y_\ell^0)$.

III. EQUATIONS DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE DU TYPE RETROGRADE.

Partant des résultats précédents, on peut appliquer les équations de la programmation dynamique du type rétrograde.

Nous notons :

$V^n(y_0^n, y_1^n, \ldots, y_\ell^n)$ le coût optimal pour la restriction du problème à l'intervalle $[n,N]$ lorsque y_0^n est le niveau du stock S_0 sur $[n,n+1)$ et y_j^n, pour $j = 1,\ldots,\ell$, le niveau du stock S_j sur $[n,n+1)$.

Nous avons les équations suivantes, pour $n = N-1,\ldots,0$:

$$\left\{\begin{array}{l} U^N = 0 \\ U^n(y_0^n,\ldots,y_\ell^n) = \sum\limits_{j=0}^{\ell} f_j^n(y_j^n) + \inf\limits_{v^n \in D_n^*(y_0^{-1},\ldots,y_\ell^0)}\{\Sigma\, c_j^n(v_j^n) \\ \quad + v^{n+1}(y_0^n + v_0^n - \sum\limits_{j=1}^{\ell} v_j^{n+1}, y_1^n + v_1^n - d_1^{n+1},\ldots,y_\ell^n + v_\ell^n - d_\ell^{n+1})\} \end{array}\right. \tag{III.1}$$

Du fait que nous procédons de manière rétrograde, le calcul de $V^n(y_0^n,\ldots,y_\ell^n)$ nécessite la connaissance du coût $U^{n+1}(y_0^n+v_0^n-\sum\limits_{j=1}^{\ell} v_j^{n+1}, y_1^n+v_1^n-d_1^{n+1},\ldots,y_\ell^n+v_\ell^n-d_\ell^{n+1})$, donc de $\sum\limits_{j=1}^{\ell} v_j^{n+1}$. Le nombre de v_j^{n+1} à faire intervenir est important. D'où l'utilité du changement de variable ci-dessous avant d'appliquer les équations de la programmation dynamique du type rétrograde.

Nous faisons le changement de variable :

$$z^n = y^n + \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n \ , \ n = 0,\ldots,N-1 \tag{III.2}$$

Nous avions $y_0^{n+1} = y_0^n + v_0^n - \sum\limits_{j=1}^{\ell} v_j^{n+1}$

donc $z^{n+1} = y_0^n + v_0^n$

d'où $z^{n+1} = z^n + v_0^n - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n$ (III.3)

Nous allons montrer que,quelque soit $n \in \{0,\dots,N-1\}$:

$$U^n(y_0^n,y_1^n,\dots,y_\ell^n) = U^n(z^n,y_1^n,\dots,y_\ell^n) = \sum_{j=1}^{\ell}\{f_j^n(y_j^n) +$$

$$+ \inf_{V^n \in D_n^*(y_0^{-1},\dots,y_\ell^0)} \{f_0^n(z^n - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n) + \sum_{j=0}^{\ell} c_j^n(v_j^n) + \qquad \text{(III.4)}$$

$$+ U^{n+1}(z^n + v_0^n - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n,\ y_1^n + v_1^n - d_1^{n+1},\dots,\ y_\ell^n + v_\ell^n - d_\ell^{n+1})\}$$

Nous démontrons ces relations par récurrence.

a. Les relations sont vraies pour N-1 et N-2 :

a1. Pour N-1

$$U^{n-1}(y_0^{N-1},y_1^{N-1},\dots,y_\ell^{N-1}) = \sum_{j=1}^{\ell} f_j^{N-1}(y_j^{N-1}) + \inf_{V^{N-1} \in D_{N-1}^*(y_0^{-1},\dots,y_\ell^0)} \{f_0^{N-1}(z^{N-1} - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^{N-1}) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{N-1}(v_j^{N-1})\} = U^{N-1}(z^{N-1},\ y_1^{N-1},\dots,\ y_\ell^{N-1})$$

Donc (III.4) est vraie pour N-1

a2. Pour N-2

$$U^{N-2}(y_0^{N-2}, y_1^{N-2}, \ldots; y_\ell^{N-2}) = \sum_{j=0}^{\ell} f_j^{N-2}(y_j^{N-2}) + \inf_{V^{N-2} \in D^*_{N-2}(y_0^{-1},\ldots,y_\ell^0)} \{ \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{N-2}(v_j^{N-2}) +$$

$$+ v^{N-1}(y_0^{N-2} + v_0^{N-2} - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^{N-1}, \ldots, y_\ell^{N-2} + v_\ell^{N-2} - d_\ell^{N-1})\}$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} f_j^{N-2}(y_j^{N-2}) + \inf_{V^{N-2} \in D^*_{N-2}(y_0^{N-2},\ldots,y_\ell^{N-2})} \{ \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{N-2}(v_j^{N-2}) + f_0^{N-2}(v_0^{N-2} - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^{N-2}) +$$

$$+ U^{N-1}(z^{N-2} + v_0^{N-2} - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^{N-2}, y_1^{N-2}+v_1^{N-2}-d_1^{N-1}, \ldots, y_\ell^{N-2}+v_\ell^{N-2}-d_\ell^{N-1})\}$$

d'aprês (III.1), (III;2) et al

$$= U^{N-2}(z^{N-2}, y_1^{N-2}, \ldots, y_\ell^{N-2})$$

b. <u>(III.4) est vraie pour tout $n \in 0,\ldots,N-1$</u>

Supposons que :

$$\left.\begin{aligned} & U^{n+1}(y_0^{n+1}, y_1^{n+1}, \ldots, y_\ell^{n+1}) = U^{n+1}(z^{n+1}, y_1^{n+1}, \ldots, y_\ell^{n+1}) \\ & = \sum_{j=1}^{\ell} f_j^{n+1}(y_j^{n+1}) + \inf_{V^{n+1} \in D^*_{n+1}(y_0^{n+1},\ldots,y_\ell^{n+1})} \{ f_0^{n+1}(z^{n+1} - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^{n+1}) + \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{n+1}(v_j^{n+1}) \\ & + U^{n+2}(z^{n+1} + v_0^{n+1} - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^{n+1}, \ldots, y_\ell^{n+1} + v_\ell^{n+1} - d_\ell^{n+2})\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.5)}$$

Et montrons que (III.4) est vraie pour n.

$$U^n(y_0^n,\dots,y_\ell^n) = \sum_{j=1}^{\ell} f_j^n(y_j^n) + \inf_{V^n \in D_n^*(y_0^n,\dots,y_\ell^n)} \{ \sum_{j=0}^{\ell} c_j^n(v_j^n) + f_0^n(z^n - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n)$$

$$+ U^{n+1}(z^n+v_0^n - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n, y_1^n+v_1^n-d_1^{n+1},\dots,y_\ell^n+v_\ell^n-d_\ell^{n+1})\} \quad \text{d'après (III.1),(III.2) et (III.5)}$$

$$= U^n(z^n,y_1^n,\dots y_\ell^n).$$

Ce qui achève la démonstration.

Ainsi, nous avons les équations de la programmation dynamique suivantes, pour n = N-1,...,0 :

$$\begin{cases} U^N = 0 \\ U^n(z^n,y_1^n,\dots,y_\ell^n) = \sum_{j=1}^{\ell} f_j^n(y_j^n) + \inf_{V^n \in D_n^*(y_0^n,\dots,y_\ell^n)} \{ f_0^n(z^n - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n \\ \quad + \sum_{j=0}^{n} c_j^n(v_j^n) + U^{n+1}(z^n+v_0^n - \sum_{j=1}^{\ell} v_j^n, y_1^n+v_1^n-d_1^{n+1},\dots,y_\ell^n+v_\ell^n-d_\ell^{n+1})\} \end{cases}$$

On voit que, dès que ℓ est supérieur à deux, le programme nécessite des ressources informatiques très importantes. D'où l'utilité de la décomposition en problèmes adjoints qui permettent une approche heuristique.

IV. PROBLEMES ADJOINTS

Nous notons $P(y_0^{-1})$, le problème initial à ℓ descendants. Nous voulons nous ramener à des problèmes à descendant unique.

Soit $V = (V_0, V_1, \ldots, V_\ell)$ un contrôle admissible appartenant à $D^*(y_0^{-1}, y_1^0, \ldots, y_\ell^0)$ et $y = (y_0, y_1, \ldots, y_\ell)$ l'ensemble des états associés.

Nous décomposons V_0, suite de réapprovisionnements de S_0, en ℓ suites $V_{0,1}, V_{0,2}, \ldots, V_{0,\ell}$ telles que

si $\quad V_0 = \{v_0^i\}^{\,i=0,\ldots,N-1}$

et $\quad V_{0,j} = \{v_{0,j}^i\}^{\,i=0,\ldots,N-1} \qquad$ pour $j = 1,2,\ldots,\ell$

alors :

$$v_0^i = \sum_{j=1}^{\ell} v_{0,j}^i \qquad i = 0,1,\ldots,N-1$$

Nous décomposons également le niveau initial de S_0, y_0^{-1} en $y_{0,j}^{-1}$, $j = 1,2,\ldots,\ell$.

Pour $j = 1,2,\ldots,\ell$, nous considérons la suite

$y_{0,j} = \{y_{0,j}^i\}^{\,i=-1,\ldots,N} \qquad$ donnée par :

$$y_{0,j}^{i+1} = y_{0,j}^i + v_{0,j}^i - v_j^{i+1} \qquad \text{pour } i = -1,\ldots,N-1$$

Une telle décomposition n'est évidemment pas unique. Nous allons préciser comment nous l'effectuons.

1. Décomposition

On distingue 2 cas :

1.1. S_0 n'est par réapprovisionné

1.2. S_0 est réapprovisionné au moins une fois

Nous détaillons ces deux cas :

1.1. <u>S_0 n'est pas réapprovisionné</u> :

Alors le théoème II entraîne que :

1.1.1. $V_{0,j}$ a toutes ses composantes nulles pour $j = 1,\dots,\ell$.

1.1.2. $$y_0^{-1} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{r=0}^{d_j} v_j^{i_j^r} + y_0^N \qquad (39)$$

Si $y_0^N \neq 0$ et si nous choisisons :

$$y_{0,j}^{-1} = \sum_{i_j^r=0}^{d_j} v_j^{i_j^r} \qquad \text{pour } j \in \{1,2,\dots,\ell\}$$

alors $$y_0^{-1} > \sum_{j=1}^{\ell} y_{0,j}^{-1}$$

C'est pourquoi, nous choisissons un $j_0 \in \{1,\dots,\ell\}$ quelconque et nous décidons que :

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{0,j_0}^{-1} = \sum_{r=0}^{d_{j_0}} v_{j_0}^{i_{j_0}^r} + y_0^N & \\ y_{0,j}^{-1} = \sum_{r=0}^{d_j} v_j^{i_j^r} \quad j = 1,2,\dots\ell & \text{et } j \neq j_0 \end{array}\right. \qquad (40)$$

et

Nous aurons pour tout $j \in \{1,2,\dots\ell\}$:

$$y_{0,j}^{i+1} = y_{0,j}^{i} - v_j^{i+1} \qquad i = -1,0,\dots,N-1.$$

Ce qui donne :

$$y_{0,j} = \{y_{0,j}^{i}\}^{i=-1,\dots,N-1} \qquad \text{pour } j = 1,2,\dots,\ell$$

et $V_{0,j}$ ayant toutes ses composantes nulles pour tout $j \in \{1,2,\dots,\ell\}$.

1.2. S_0 est réapprovisionné au moins une fois ($d_0 \geq 0$) :

Le théorème II entraîne :

1.2.1.

$$\left\{\begin{array}{l} v_0^{i_0^0} = \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i_j^r / i_0^0 < i_j^r \leq i_0^1} v_j^{i_j^r} - y_0^{i_0^1}, \quad i_0^1 = N \text{ si } d_0 = 0 \\ \text{et } y_0^{-1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i_j^r / i_j^r \leq i_0^0} v_j^{i_j^r} + y_0^{i_0^0} \end{array}\right. \tag{41}$$

1.2.2.

$$v_0^{i_0^k} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i_j^r / i_0^k < i_j^r \leq i_0^{k+1}} v_j^{i_j^r} \qquad k = 1,\dots,d_0 \tag{42}$$

$i_0^{k+1} = N$ si $d_0 = k$.

Si $y^{i_0^0} \neq 0$ et si nous décidons de faire la répartition :

$$\left\{\begin{array}{l} y_{0,j}^{-1} = \displaystyle\sum_{i_j^r / 0 \leq i_j^r \leq i_0^0} v_j^{i_j^r} \\ \text{et } v_{0,j}^{i_0^0} = \displaystyle\sum_{i_j^r / i_0^0 < i_j^r \leq i_0^1} v_j^{i_j^r} \end{array}\right. \qquad j \in \{1,2,\dots\ell\}$$

$$\text{alors} \quad \begin{cases} y_0^{-1} > \sum_{j=1}^{\ell} y_{0,j}^{-1} \\ \text{et} \quad v_0^{i_0^0} < \sum_{j=1}^{\ell} v_{0,j}^{i_0^0} \end{cases}$$

c'est pourquoi nous choisissons un $j_0 \in \{1,\dots,\ell\}$ quelconque et nous décidons que :

$$\begin{cases} y_{0,j_0}^{-1} = \sum\limits_{i_{j_0}^r / 0 \leq i_{j_0}^r \leq i_0^0} v_{j_0}^{i_{j_0}^r} + y_0^{i_0^0} & \\ y_{0,j}^{-1} = \sum\limits_{i_j^r / 0 \leq i_j^r \leq i_0^0} v_j^{i_j^r} & j \in \{1,2,\dots\ell\} \text{ et } j \neq j_0 \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} v_{0,j_0}^{i_0^0} = \sum\limits_{i_{j_0}^r / i_0^0 < i_{j_0}^r \leq i_0^1} v_{j_0}^{i_{j_0}^r} - y_0^{i_0^0} & \\ v_{0,j_0}^{i_0^0} = \sum\limits_{i_j^r / i_0^0 < i_j^r < i_0^1} v_j^{i_j^r} & j \in \{1,2,\dots\ell\} \text{ et } j \neq j_0 \end{cases} \tag{44}$$

$$v_{0,j}^{i_0^k} = \sum\limits_{i_j^r / i_0^k < i_j^r \leq i_0^{k+1}} v_j^{i_j^r} \qquad j \in \{1,2,\dots\ell\} \tag{45}$$

Nous avons pour tout $j \in \{1,2,\dots\ell\}$

$$y_{0,j}^{i+1} = y_{0,j}^{i} + v_{0,j}^{i} - v_j^{i+1} \qquad i = -1,0,\dots N-1 \tag{46}$$

Nous remarquons que pour tout $j \in \{1,\dots,\ell\}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{\ell} y_{0,j}^{i} = y_0^{i} & \text{pour } i = -1,0,\dots,N \\ \\ \sum_{j=1}^{\ell} v_{0,j}^{i} = v_0^{i} & \text{pour } i = 0,\dots,N-1 \end{array}\right. \tag{47}$$

et

d'après les relations (43) à (46).

Ce qui nous donne les décompositions :

$$Y_{0,j} = \{y_{0,j}^{i}\}^{i=-1,0,\dots,N} \qquad j=1,2,\dots\ell$$

$$V_{0,j} = \{v_{0,j}^{i}\}^{i=0,\dots,N-1} \qquad j=1,2,\dots\ell$$

Pour tout $V \in D^*(y_0^{-1}, y_1^0,\dots,y_\ell^0)$ les relations (39) à (47) ,nous donnent les décompositions :

$$\left\{\begin{array}{l} V_0 = \sum_{j=1}^{\ell} V_{0,j} \\ \\ Y_0 = \sum_{j=1}^{\ell} y_{0,j} \end{array}\right.$$

et

2. Définition du problème adjoint

Soit $V \in D^*(y_0^{-1},y_1^o,\dots,y_\ell^o)$, et Y l'ensemble des états associés, nous le décomposons grâce aux relations (39) à (47).

Pour $j_0 \in \{1,2,\dots,\ell\}$, le problème adjoint à descendant unique, noté $P^{j_0}(y_{0,j_0}^{-1})$, est le problème $P(y_0^{-1})$ (problème initial à ℓ descendants) où, quelque soit $i = 0,\dots,N-1$, $j = 1,2,\dots\ell$ et $j \neq j_0$, les variables $v_{0,j}^{i}$, $y_{0,j}^{i}$, v_j^i et y_j^i sont fixées.

$P^{j_0}(y^{-1}_{0,j_0})$ sera défini de la manière suivante :

pour $j_0 = 1,2,\ldots\ell$:

a) $d^i_{j_0}$, $i=1,\ldots,N$ est la demande de S_{j_0} à l'instant i.

pour $i = 1,\ldots,N-1$

b) $f^i_{j_0}$ est le coût de stockage de S_{j_0} sur $[i,i+1)$.

c) $c^i_{j_0}$ est le coût de lancement de S_{j_0} sur $[i,i+1)$.

d) f^i_{0,j_0} est le coût de stockage de S_0 sur $[i,i+1)$

e) c^i_{0,j_0} est le coût de lancement de S_0 sur $[i,i+1)$

f) $y^{-1}_{0,j_0} \geq 0$ est le niveau initial du stock S_0

g) $y^0_{j_0} \geq 0$ est le niveau initial du stock S_{j_0}.

Si y^i_0 est l'état du stock S_0 à l'instant i et v^i_0 son réapprovisionnement à l'instant i pour le contrôle $V \in D^*(y^{-1}_0, y^0_1, \ldots y^0_\ell)$, alors :

$$\left\{\begin{array}{l} y^i_0 = \sum_{j=1}^{\ell} y^i_{0,j} \\ \\ v^i_0 = \sum_{j=1}^{\ell} v^i_{0,j} \end{array}\right.$$

et

Nous notons :

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{y}^i_{0,j_0} = y^i_0 - y^i_{0,j_0} & i=-1,\ldots,N \\ \\ \bar{v}^i_{0,j_0} = v^i_0 - v^i_{0,j_0} & i=0,\ldots,N-1 \end{array}\right. \tag{48}$$

et

$\bar{y}^i_{0,j_0}$ et $\bar{v}^i_{0,j_0}$ sont connues.

f^i_{0,j_0} sera définie comme suit :

$$f^i_{0,j_0}(x^i) = f^i_{j_0}(x^i + \bar{y}^i_{0,j_0}) \tag{49}$$

De même pour c^i_{0,j_0} :

$$c^i_{0,j_0}(v^i) = c^i_{j_0}(v^i + \bar{v}^i_{0,j_0}) \tag{50}$$

f^i_{0,j_0} et c^i_{0,j_0} sont bien définies car on connait, pour $P^{j_0}(y^{-1}_{0,j_0})$, $\bar{y}^i_{0,j_0}$ et $\bar{v}^i_{0,j_0}$ pour $i=0,\dots,N-1$.

Elles sont aussi concaves et non décroissantes.

Donc $P^{j_0}(y^{-1}_{0,j_0})$ est un problème à deux niveaux et à descendant unique, déjà traité dans [5].

3. Condition nécessaire d'optimalité :

La condition que nous allons énoncer est une condition nécessaire mais non suffisante d'optimalité.

Condition nécessaire :

Si V est un contrôle optimal alors, quelque soit $j=1,2,\dots\ell$

$$(V_{0,j}, V_j) \text{ est optimal pour } P^j(y^{-1}_{0,j}) \tag{51}$$

Démonstration :

Si $(V_{0,j},V_j)$ n'était pas optimal pour $P^j(y_{0,j}^{-1})$ et s'il existait $(V_{0,j}^0,V_j^0)$ optimal pour $P^j(y_{0,j}^{-1})$, alors V ne serait pas optimal pour $P(y_0^{-1})$, problème à ℓ descendants.En effet par définition du problème $P^j(y_{0,j}^{-1})$, le coût associé à $(V_{0,j}^0,V_j^0)$ pour $P^j(y_{0,j}^{-1})$ est égal au coût associé à

$V^0=(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\ell} V_{0,k}+V_{0,j}^0,V_1,V_2,\ldots,V_{j-1},V_j^0,V_{j+1},\ldots,V_\ell)$ pour le problème $P(y_0^{-1})$.

Et aussi le coût associé à $(V_{0,j},V_j)$pour le problème $P^j(y_{0,j}^{-1})$ est égal à celui associé à V pour le problème $P(y_0^{-1})$.

Dans ce cas le coût associé à V^0 serait inférieur à celui associé à V. Or V est optimal pour $P(y_0^{-1})$.

Donc $(V_{0,j},V_j)$ est optimal pour $P^j(y_{0,j}^{-1})$. □

Cette condition d'optimalité nous permet d'énoncer une heuristique. Cette heuristique alourdit le programme mais diminue les ressources informatiques dans la mesure où elle traite des problèmes à descendant unique.

Chaque groupe de problèmes adjoints dépend de la décomposition de départ de y_0^{-1} en $\sum_{j=1}^{\ell} y_{0,j}^{-1}$.

On peut déterminer le nombre de décomposition de y_0^{-1}. Si $V\in D^*(y_0^{-1},y_1^0,\ldots,y_\ell^0)$, le théorème II nous permet d'écrire :

$$y_0^{-1} = \sum_{j=1}^{\ell} (\sigma_j^{1,r_j} - y_j^0)^+ + \alpha_k \quad \text{où } r_j \in \{1,\ldots,N\} \tag{52}$$

pour chaque ℓ- plet $r=(r_1,\ldots,r_\ell)$ et pour $j_0 \in \{1,\ldots,\ell\}$, y_{0,j_0}^{-1} peut prendre l'une des deux valeurs :

$$\left\{\begin{array}{l} (\sigma_{j_0}^{1,r_{j_0}} - y_{j_0}^0)^+ \\ \text{et} \quad (\sigma_{j_0}^{1,r_{j_0}} - y_{j_0}^0)^+ + \alpha_k \end{array}\right. \tag{53}$$

Et si $y_{0,j_0}^{-1} = (\sigma_{j_0}^{1,r_{j_0}} - y_{j_0}^0)^+ + \alpha_k$ alors

$\forall j \in \{1,2,\ldots,\ell\}$ et $j \neq j_0$

$$y_{0,j}^{-1} = (\sigma_j^{1,r_j} - y_j^0)^+$$

On remarque d'après (52) et (53) que pour un $j_0 \in \{1,\ldots,\ell\}$ fixé, y_{0,j_0}^{-1} ne peut être égal à y_0^{-1} que si $y_j^0 \geq d_j^1$ quelque soit $j \in \{1,\ldots,\ell\}$ et $j \neq j_0$.

L'exemple suivant illustre les relations (52) et (53).

Exemple :

Si $\ell = 2$, $N = 4$, $y_0^{-1} = 10$, $y_1^0 = 2$, $y_2^0 = 5$, $\underset{=}{d}_1 = (3,4,3,5)$ et $\underset{=}{d}_2 = (2,6,2,4)$.

on a 6 décompositions :

$$(y_{0,1}^{-1}, y_{0,2}^{-1}) \in \{(1,9), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (10,0)\}$$

V. L'HEURISTIQUE

Nous commençons par l'exposer dans le cas de deux descendants.

1. Problème à deux descendants :

Nous adoptons le changement de notations suivant: pour un contrôle admissible $(V_{01} + V_{02}, V_1, V_2)$, $P^1(y_{0,1}^{-1})$ sera noté $P_{V_{01},V_1}(y_{0,2}^{-1})$ et $P^2(y_{0,2}^{-1})$, $P_{V_{02},V_1}(y_{0,2}^{-1})$.

$P^j(y_{0,j}^{-1})$ ayant été défini précédemment. On part d'une décomposition $y_{0,1}^{-1} + y_{0,2}^{-1} = y_0^{-1}$.

On génère un contrôle $V^1 \in D^*(y_0^{-1}, y_1^0, y_2^0)$ à partir de $y_{01}^{-1} + y_{02}^{-1}$.

En décomposant V^1 on obtient $(V_{0,1}^1 + V_{0,2}^1, V_1^1, V_2^1)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si } (V_{0,1}^1, V_1^1) \text{ est optimal pour } P_{V_{0,2}^1,V_2^1}(y_{0,1}^{-1}) \\ \\ \text{et si } (V_{0,2}^1, V_2^1) \text{ est optimal pour } P_{V_{0,1}^2,V_1^2}(y_{0,2}^{-1}). \end{array}\right.$$

alors la condition nécessaire d'optimalité est vérifiée et on s'arrête. Sinon on construit V^2 à partir de V^1 de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} (V_{0,1}^2,V_1^2) \text{ est optimal pour } P_{V_{0,2}^1,V_2^1}(y_{0,1}^{-1}) \\ \\ (V_{0,2}^2,V_2^2) \text{ est optimal pour } P_{V_{0,1}^2,V_1^2}(y_{0,2}^{-1}). \end{array}\right.$$

(On dira que V est meilleur que V' si le coût total associé au contrôle V est inférieur à celui associé à V'.)

Ici on a <u>V^2 meilleur que V^1</u>, car :

$(V^2_{,1} + V^1_{,2}, V_1^2, V_2^1)$ est meilleur que V^1

et V^2 est meilleur que $(V^2_{,1} + V^1_{,2}, V_1^2, V_2^1)$.

Si $(V^2_{,2}, V_2^2)$ est égal à $(V^1_{,2}, V_2^1)$ alors la condition d'optimalité est réalisée.

Sinon on construit V^3 à partir de V^2 comme V^2 l'a été à partir de V^1.

On engendre ainsi une suite de contrôles admissibles :

$V^1, V^2, \ldots, V^{n-1}, V^n, \ldots$

V^n obtenu à partir de V^{n-1} par la relation :

$$\left\{\begin{array}{l} (V^n_{,1}, V_1^n) \text{ est optimal pour } P_{V^{n-1}_{,2}, V_2^{n-1}}(y^{-1}_{,1}) \\ \\ (V_{,2}, V_2^n) \text{ est optimal pour } P_{V^n_{,1}, V_1^n}(y^{-1}_{,2}) \end{array}\right. \tag{54}$$

et

près un nombre fini d'itérations on aboutit à un contrôle vérifiant la condition nécessaire d'optimalité.

On cherche un contrôle vérifiant la condition nécessaire d'optimalité, à partir d'une répartition du stock initial du niveau haut entre les stocks du niveau bas.

Parmi les décompositions de y_0^{-1}, il y en a une qui conduit au contrôle optimal.

Dans cette heuristique on doit répéter le procédé plusieurs fois, en partant chaque fois d'une décomposition différente de y_0^{-1}

On choisira, donc, un certain nombre de décompositions,et pour chaque décomposition,on fixera le nombre d'essais à effectuer.

De ces résultats on retiendra le contrôle conduisant au coût le plus faible.

La lourdeur de l'heuristique est aussi fonction de y_0^{-1}. Plus le nombre de décomposition est petit, plus l'heuristique est simple.

2. Problème à ℓ descendants :

Nous adoptons les notations suivantes :
Si $V=(V_0,V_1,\dots,V_j,\dots,V_\ell)$ alors $\overline{V}=(V_0,V_1,\dots,V_{j-1},V_{j+1},\dots,V_\ell)$
Si $(V_{0,1}+V_{0,2}+\dots V_{0,}\ ,V_1,\dots,V_\ell)$ est un contrôle admissible $\overline{(V_{0,j},V_j)}$ est égal au vecteur $(V_{0,1}+\dots V_{0,j-1}+V_{0,j+1}+\dots+V_{0,\ell},V_1,\dots V_{j-1},V_{j+1},\dots V_\ell)$.

On part d'une décomposition de y_0^{-1} en $\sum\limits_{j=1}^{\ell} y_{0,j}^{-1}$ obtenue à partir des relations (52) et (53).

On génère un contrôle admissible V^0, $V^0 \in D^*(y_0^{-1},y_1^0,\dots,y_\ell^0)$. On construit V^1 de la manière suivante :

$$(V_{0,1}^1,\ V_1^1) \text{ est optimal pour } P_{\overline{(V_{0,1}^0,V_1^0)}}(y_{0,1}^{-1})$$

$$V^1 = (V_{0,1}^1+\overline{V}_{0,1}^0,\ V_1^1,\ V_2^0,\ V_3^0,\dots V_\ell^0)$$

On construit V^2 à partir de V^1 ainsi :

$(V_{0,2}^2, V_2^2)$ est optimal pour $P_{(V_{0,2}^1, V_2^1)}(y_{0,2}^{-1})$

$V^2 = (V_{0,2}^2 + \overline{V_{0,2}^1}, V_1^1, V_2^2, V_3^1 \ldots, V_\ell^1)$

et ainsi de suite :

V^n à partir de V^{n-1}

$n = q \times \ell + k, k \leq \ell, k \neq o$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$(V_{0,k}^n; V_k^n) \text{ est optimal pour } P_{\overline{(V_{0,k}^{n-1}, V_{0,k}^{n-1})}}(y_{0,k}^{-1}) \qquad (55)$$

On génére ainsi une suite $V^0, \ldots, V^{n-0}$, V^n de contrôles admissibles. V^n est meilleur que V^{n-1}.

Après un nombre infini d'itérationson aboutit à un contrôle vérifiant la condition nécessaire d'optimalité. Nous avons les mêmes remarques que pour le cas de deux descendants.

Le contrôle vérifiant la condition nécessaire obtenueest fonction de la décomposition de départ,(décomposition de y_0^{-1}).

On répète plusieurs fois le procédé, en partant chaque fois d'une nouvelle décomposition de y_0^{-1}. Pour chaque décomposition on fixe le nombre d'essais à partir duquel on s'arrête si on n'aboutit pas à la condition nécessaire d'optimalité. On choisira le meilleur contrôle parmi les contrôles obtenus.

CONCLUSION

Nous venons de présenter, dans cette deuxième partie, comment trouver le contrôle optimal pour le problème multi-niveau avec plusieurs descendants, à partir des équations de la programmation dynamique du type rétrograde. Cette méthode donne le coût optimal mais nécessite des ressources importantes pour un grand nombre de descendants.

Sa complexité est de l'ordre de celle du problème à un niveau et ℓ produits, où ℓ est le nombre de descendants. Nous avons ensuite présenté une heuristique, laquelle, alourdit le programme. Cette lourdeur est dûe en partie à la décomposition du niveau initial du stock du niveau haut, y_0^{-1}.

Si on connait les fonctions coûts on peut commencer par déterminer les bonnes décompositions de y_0^{-1} et les bons contrôles admissibles. Cette heuristique fait intervenir des problèmesadjoints qui sont à descendant unique. Nous signalons qu'aucune simplification n'a été faite. Dans certain cas on considère que la fonction de stockage du niveau haut est fonction du cumul des niveaux de stock ou que les fonctions coût du niveau haut sont linéaires. En changeant les équations d'état, dans le cas où les demandes sont livrées sans retard de période, le problème devient moins complexe, nous l'avons résolu dans [6] pour le cas à descendant unique. Sans généralisation à ℓ descendants se traite sans difficulté.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] A. BENSOUSSAN, M. CROULY, J.M. PROTH, "Mathematical Theory of Production Planning", Advanced Series in Manegement, North Holland Publishing, 1983.

[2] A. BENSOUSSAN, J.M. PROTH, "Gestion de stocks avec coûts concaves", RAIRO Automatique/ Systems Analysis and Control, Vol.15,n°3,pp.201, 1981.

[3] A. BENSOUSSAN, J.M. PROTH, "Inventory Planning in Deterministic Environment : Concave Cost set up in Discrete and Continuous Time", Vienna, December, 1981.

[4] A. BENSOUSSAN, Cours de 3ème cycle Paris IX Dauphine, 1980-1981, "Théorie Mathématique de la gestion de la Production".

[5] A. HAOUBA et J.M. PROTH, "Gestion d'un stock à deux niveaux", Rapports de Recherche n° 302, INRIA,Mai 1984.

[6] A. HAOUBA et J.M. PROTH, "The two levels planning problem : Concave Costs and deterministic environment", à paraître.

[7] V.I. LEOPOULOS and J.M. PROTH, "Le problème Multi-produit avec Coûts Concaves et Incitation aux Lancements Groupes, à paraître.

[8] W.I. ZANGWILL, A backloging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System. A Network Approach, Management Sciences 15, 506-527 (1969).

[9] H.M. WAGNER and T.M.Whitin, Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, Management Science, 5, 89-96, (1958).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique